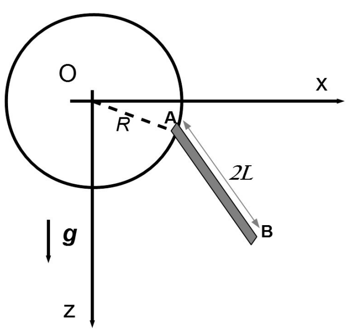
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ ΙΟΥΝΙΟΣ 2013

ΕΠΩΝΥΜΟ: ΟΝΟΜΑ: ΑΕΜ: (ΠΤΥΧΙΟ)

1. **(α)** Περιγράψτε συνοπτικά το πείραμα των Michelson και Morley (όχι απόδειξη σχέσεων). Ποιό ήταν το βασικό αποτέλεσμα του πειράματος;
**(β)** Διατυπώστε τα θεμελιώδη αξιώματα της Ειδικής Θεωρίας Σχετικότητας. **(2 μονάδες)**

2. Βρείτε (εξηγείστε πώς) τους βαθμούς ελευθερίας των παρακάτω συστημάτων: **(α)** υλικό σημείο που κινείται υποχρεωτικά επί δεδομένης καμπύλης $y$=$f$($x$) στο επίπεδο Oxy **(β)** στερεά ράβδος που κινείται στο επίπεδο Oxy έτσι ώστε το κέντρο μάζας της να βρίσκεται πάντοτε επί δεδομένης καμύλης $y_K=f(x_K)$, **(γ)** τρία υλικά σημεία που κινούνται στο επίπεδο Oxy έτσι ώστε να σχηματίζουν πάντοτε ισόπλευρο τρίγωνο, και **(δ)** δύο κυκλικοί δίσκοι που κινούνται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz έτσι ώστε να κυλίονται ομαλά πάνω στον άξονα Ox (το επίπεδό τους συμπίπτει πάντοτε με το Oxz) και τα κέντρα τους είναι συδεδεμένα με αβαρές ελατήριο. **(2 μονάδες)**

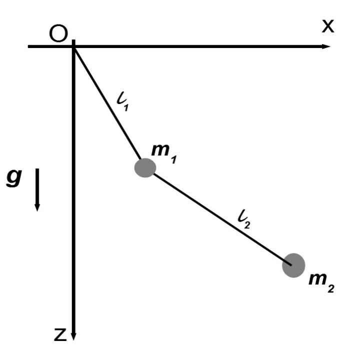
3. Το άκρο Α της ομογενούς ράβδου του σχήματος είναι υποχρεωμένο να κινείται επάνω στην περιφέρεια του σταθερού κατακόρυφου κυκλικού σύρματος, αμελητέας μάζας και ακτίνας $R$. Η μάζα της ράβδου είναι $m$ και το μήκος της $2L$. Το σύστημα κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz, υπό την επίδραση ομογενούς βαρυτικού πεδίου, $\vec{g}$ . Να υπολογίσετε:




**(α)** τη συνάρτηση Lagrange
**(β)** τα ολοκληρώματα της κίνησης
**(γ)** τις εξισώσεις Lagrange και τα σημεία ισορροπίας

**(3 μονάδες)**

4. Το υλικό σημείο $\Sigma_1$, μάζας $m_1$, είναι συνδεδεμένο με αβαρές, μη εκτατό σύρμα σταθερού μήκους $l_1$ που το άλλο άκρο του είναι συνδεδεμένο με την αρχή των αξόνων, O. Το υλικό σημείο $\Sigma_2$, μάζας $m_2$, συνδέεται με το $\Sigma_1$ με αβαρές, μη εκτατό σύρμα σταθερού μήκους $l_2$. Το σύστημα βρίσκεται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz και κινείται υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας, $\vec{g}$ . Να βρεθούν:




**(α)** η συνάρτηση Lagrange
**(β)** οι εξισώσεις Lagrange
**(γ)** τα σημεία ισορροπίας

**(3 μονάδες)**

---

– Διάρκεια εξετάσεων: **2 - 1/2** ώρες

– Δίνονται: $T=\frac{1}{2}m v_0^2+\vec{v}_0\cdot(\vec{\omega}\times m\,\vec{r}_K)+\frac{1}{2}I\omega^2$ , $\cos(x\text{-}y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$ ,

Ροπή αδρανείας (ως προς $K.M.$) ομογενούς ράβδου, μάζας $m$ και μήκους $l$: $I=\frac{m\,l^2}{12}$

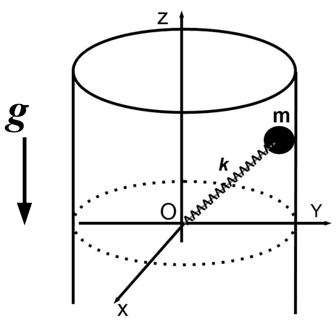
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

ΕΠΩΝΥΜΟ: ΟΝΟΜΑ: ΑΕΜ: ΕΞΑΜΗΝΟ:

1. (α) Πώς ορίζεται το ελλειψοειδές αδράνειας ενός στερεού σώματος; Ποιά κύρια διεύθυνση του ελλειψοειδούς αντιστοιχεί στη μεγαλύτερη τιμή της ροπής αδράνειας;
   (β) Διατυπώστε το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (θεώρημα Steiner)

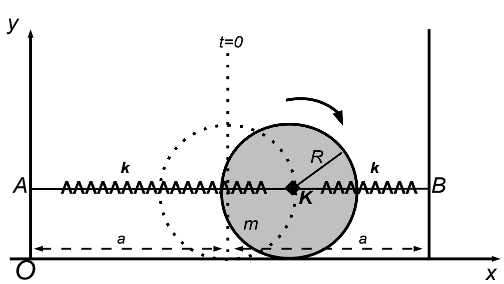
2. Δείξτε ότι, σε ένα σύστημα $n$ βαθμών ελευθερίας, αν υπάρχει αγνοήσιμη συντεταγμένη, τότε η τάξη του συστήματος των εξισώσεων του Hamilton υποβιβάζεται κατά δύο.

3. Η μάζα $m$ του σχήματος είναι υποχρεωμένη να κινείται υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας $\vec{g}$ επάνω στην επιφάνεια ορθού κυλίνδρου, απείρου μήκους και ακτίνας $a$. Ο άξονας συμμετρίας του κυλίνδρου είναι παράλληλος στη διεύθυνση του πεδίου βαρύτητας. Η μάζα συνδέεται με ελατήριο σταθεράς $k$ και φυσικού μήκους $a$, το ένα άκρο του οποίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο στο σημείο Ο. Να υπολογίσετε:




   (α) τους βαθμούς ελευθερίας, τους δεσμούς της κίνησης, και τη συνάρτηση Lagrange
   (β) τα ολοκληρώματα και τις διαφορικές εξισώσεις της κίνησης,
   (γ) τι κίνηση θα εκτελέσει η $m$ αν αρχικά τοποθετηθεί χωρίς ταχύτητα σε θέση με κατακόρυφη συντεταγμένη $z_0$ που ικανοποιεί τη σχέση $\dfrac{a-\sqrt{a^2+z_0^2}}{\sqrt{a^2+z_0^2}}\,k\,z_0=m\,g$ ;

4. Ομογενής κυκλικός δίσκος μάζας $m$ και ακτίνας $R$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει κατά μήκος του $Ox$, διατηρώντας πάντοτε το επίπεδό του παράλληλο με το επίπεδο $Oxy$. Το κέντρο του δίσκου $K$ συνδέεται με τα τοιχώματα του σχήματος στα σημεία Α και Β, μέσω δύο ίδιων ελατηρίων, σταθεράς $k$ και φυσικού μήκους $a$. Αρχικά, ο δίσκος ισορροπεί στο μέσον του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ=2$a$. Να βρεθούν:




   (α) οι εξισώσεις Lagrange
   (β) η συνάρτηση Hamilton και τα ολοκληρώματα της κίνησης
   (γ) η θέση ισορροπίας και η συχνότητα των μικρών ταλαντώσεων

---

- Το έντυπο των θεμάτων να παραδοθεί μαζί με το γραπτό
- Διάρκεια εξετάσεων: **2 1/2** ώρες
- Τα θέματα **(1)** και **(2)** δίνουν από **2 μονάδες** (ισοδύναμα υποερωτήματα).
  Τα θέματα **(3)** και **(4)** από **3 μονάδες**

Δίνεται: $T=\frac{1}{2}m\,v_0^2+\vec{v}_0\cdot(\vec{\omega}\times m\,\vec{r}_K)+\frac{1}{2}I\,\omega^2$

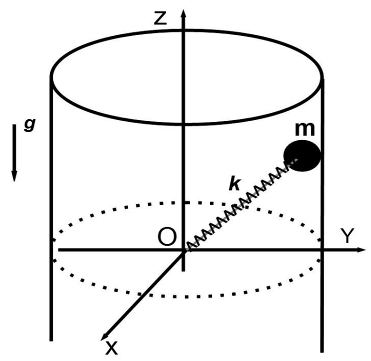
Ροπή αδρανειας κυκλικού δίσκου (ως προς $K$): $I = mR^2/2$

# ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

*Εξεταστική Περίοδος Φεβ. 2013*

## Λύσεις των Ασκήσεων

**<u>Θέμα 3:</u>**




Το καταλληλότερο σύστημα συντεταγμένων για το πρόβλημα είναι οι κυλινδρικές, $\rho$ , $\varphi$ , $z$ .
Υπάρχει ένας δεσμός της κίνησης: $\rho = a$ (σκληρόνομος), οπότε το σύστημα έχει **δυο** βαθμούς ελευθερίας. Θεωρούμε ως γενικευμένες συντεταγμένες την κατακόρυφη θέση $z$ και τη γωνία $\varphi$ που σχηματίζει η προβολή του διανύσματος θέσης της στο επίπεδο $xy$ με τον άξονα $Ox$ .

Οι τύποι μετασχηματισμού των καρτεσιανών συντεταγμένων του σώματος είναι:
$x = a\cos\varphi$ , $y = a\sin\varphi$ , $z = z$ .

Κινητική ενέργεια:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^{\,2} + \rho^{\,2}\dot{\varphi}^{\,2} + \dot{z}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(a^2\dot{\varphi}^{\,2} + \dot{z}^2\right).$$

Δυναμική ενέργεια σώματος

$V = mgz + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+z^2} - a\right)^2$ αφού $\Delta l = r - a = \sqrt{a^2+z^2} - a$ είναι η επιμήκυνση του ελατηρίου. Επομένως, η συνάρτηση Lagrange είναι:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(a^2\dot{\varphi}^{\,2} + \dot{z}^{\,2}\right) - mgz - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+z^2} - a\right)^2$$

(β) Επειδή η συνάρτηση Lagrange δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο υπάρχει το ολοκλήρωμα Jacobi:

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\,\dot{\varphi} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\,\dot{z} - L = T + V$$

το οποίο ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, μιας και οι μετασχηματισμοί μεταξύ καρτεσιανών και γενικευμένων συντεταγμένων δεν εξαρτώνται ρητά από το χρόνο. Επίσης, επειδή η $\varphi$ είναι αγνοήσιμη, υπάρχει το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της ορμής:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ma^2\dot{\varphi} = ct.$$

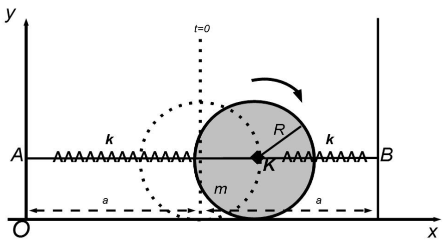
Οι εξισώσεις κίνησης (εξ. Lagrange) είναι:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z}=0\rightarrow\ m\ddot{z}+mg+k\frac{(\sqrt{a^2+z^2}-a)}{\sqrt{a^2+z^2}}\ z=0$$

και $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \varphi}=0\rightarrow\ =\ m a^2\ddot{\varphi}=0$

(γ) Για να βρούμε τη θέση ισορροπίας $z = z^*$, $\varphi = \varphi^*$ του σώματος θα θέσουμε στις εξισώσεις κίνησης $\dot{z} = \ddot{z} = \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$. Οπότε, βρίσκουμε ότι η $\varphi^*$ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή ενώ η συντεταγμένη $z^*$ ικανοποιεί τη σχέση που δίνεται στην εκφώνηση. Επομένως, αν το σώμα τοποθετηθεί αρχικά **χωρίς ταχύτητα** ($\dot{z}=\dot{\varphi}=0$) στη θέση $z_0$, τότε θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και θα παραμείνει εκεί ακίνητο για πάντα.

**<u>Θέμα 4:</u>**




Ο δίσκος έχει **ένα βαθμό ελευθερίας**, αφού κινείται μόνο κατά τον άξονα Ox ($y_K$=R) και μάλιστα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, οπότε $\dot{x}=R\dot{\varphi}$, όπου $x$ το μήκος του τόξου που διαγράφει ο δίσκος και $\varphi$ η γωνία που σχηματίζει μια σταθερή διεύθυνση του δίσκου με τον άξονα Oy. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ως συντεταγμένη είτε την απομάκρυνση του κέντρου μάζας από το O (την $x_K$) είτε την απομάκρυνση από την αρχική θέση ισορροπίας στο μέσον του AB ($x$) ή τη γωνία $\varphi$.

Ολοκληρώνοντας τη συνθήκη κύλισης παίρνουμε $\dot{x}=R\dot{\varphi}\rightarrow x-x_0=R(\varphi-\varphi_0)$. Έτσι, αν επιλέξουμε π.χ. ως συντεταγμένη την $x$, τότε για $t=t_0$ πρέπει να είναι $x_0=0$ κι επομένως $\varphi_0=0$.

Κινητική ενέργεια: $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2\rightarrow$

$T=\frac{3}{4}m\dot{x}^2$ ή, αντίστοιχα για τη $\varphi$: $T=\frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2$

Δυναμική ενέργεια:
η βαρύτητα δεν παίζει ρόλο. Τα δύο ελατήρια έχουν **την ίδια** (κατά μέτρο) μεταβολή μήκους, $\Delta l_1=l_1-l_0=AK-a=x$ και $\Delta l_2=KB-a=(2a-AK)-a=-x$ και

$$V=\frac{1}{2}k\Delta l_1^2+\frac{1}{2}k\Delta l_2^2=k x^2 \quad (\acute{\eta} \quad V=kR^2\varphi^2)$$

οπότε η συνάρτηση του Lagrange είναι:

$$L=T-V=\frac{3}{4}m\dot{x}^2-kx^2 \quad \acute{\eta} \quad L=\frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2-kR^2\varphi^2$$

και η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} + 2k\,x = 0 \qquad ή \qquad \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi} + 2k\,R^2 \varphi = 0$$

Η γενικευμένη ορμή είναι: $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{3}{2} m \dot{x}$ και η συνάρτηση Hamilton δίνεται από τη σχέση

$H = \dot{x}\,p - L = \frac{2p^2}{3m} - \frac{3}{4} m \left( \frac{2p}{3m} \right)^2 + k\,x^2 = \frac{p^2}{3m} + k\,x^2$ αφού γίνει **απαλοιφή** της $\dot{x}$ (αντίστοιχα εάν έχετε επιλέξει τη γωνία $\varphi$)

Εφόσον ο χρόνος δεν εμφανίζεται άμεσα στην $L$ και δεν υπάρχουν μετασχηματισμοί συντεταγμένων που να εξαρτώνται από το χρόνο, υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi και μάλιστα ταυτίζεται με τη μηχανική ενέργεια του συστήματος, $J=T+V$. Η ορμή δεν διατηρείται σταθερή, αφού η $x$ (όπως και η $\varphi$ αντίστοιχα) δεν είναι αγνοήσιμη.

Από την εξίσωση κίνησης βρίσκουμε τη θέση ισορροπίας, αν θέσουμε $\ddot{x} = 0\,(ή\,,\ \ddot{\varphi} = 0)$ οπότε προκύπτει $x_\circ = 0 = \varphi_\circ$ . Η εξίσωση είναι ήδη γραμμική και έχει τη μορφή της εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{x} + \frac{4k}{3m} x = 0$$

με συχνότητα $\omega^2 = 4k/(3m)$ .

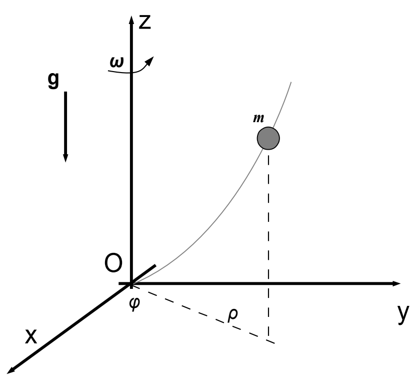
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ ΙΟΥΝΙΟΣ 2012

ΕΠΩΝΥΜΟ: ΟΝΟΜΑ: ΑΕΜ: ΕΞΑΜΗΝΟ:

1. α) Όταν η συνάρτηση Lagrange ενός συστήματος δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, υπάρχει ένα ολοκλήρωμα της κίνησης. Δώστε τη μορφή του και <u>αποδείξτε</u> ότι είναι ολοκλήρωμα της κίνησης.
   β) Αν η συνάρτηση $\Phi(q_1,q_2,p_1,p_2)$ είναι ολοκλήρωμα της κίνησης των εξισώσεων Hamilton, με συνάρτηση Hamilton την $H(q_1,q_2,p_1,p_2)$, αποδείξτε ότι η αγκύλη Poisson $[\Phi,H]$ είναι ίση με μηδέν.

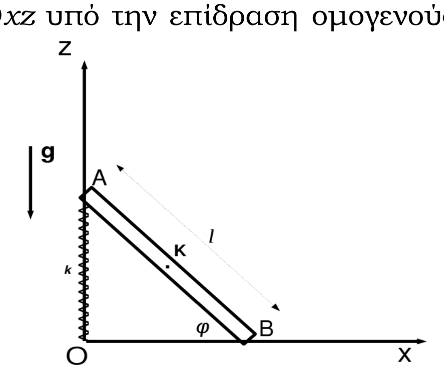
2. Ο πίνακας του τανυστή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας $O$ στερεού σώματος, μάζας $m$=1, εκπεφρασμένος στο καρτεσιανό σύστημα $O$xyz που είναι σταθερά συνδεδεμένο με το στερεό σώμα, έχει στοιχεία $J_{11}$=1, $J_{12}$=0, $J_{13}$=0, $J_{22}$=2, $J_{23}$=0, $J_{33}$=3. Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το σημείο Α(2,-1,4) και είναι παράλληλος προς το διάνυσμα (2,-1,4).

3. Σώμα μάζας $m$ είναι υποχρεωμένο να κινείται χωρίς τριβή πάνω στον κλάδο της παραβολής $z = 3\rho^2$ του σχήματος, υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας. Η παραβολή περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, $\omega$, γύρω από τον κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο. Να υπολογίσετε:




   (α) τη συνάρτηση Lagrange του συστήματος,
   (β) τις διαφορικές εξισώσεις και τα ολοκληρώματα της κίνησης
   (γ) τη συνάρτηση Hamilton του συστήματος.

4. Η ομογενής στερεά ράβδος, μήκους $l$ και μάζας $m$, κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο Ο$xz$ υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας, έτσι ώστε τα δύο άκρα της, Α και Β, να εφάπτονται πάντοτε στον άξονα $Oz$ και $O$x αντίστοιχα. Αβαρές ελατήριο, σταθεράς $k$ και φυσικού μήκους $l_0$, συνδέει το Α με το $O$. Να βρεθούν :




   (α) οι εξισώσεις Lagrange του συστήματος
   (β) η συνάρτηση του Hamilton
   (γ) τα ολοκληρώματα της κίνησης

---

- Διάρκεια εξετάσεων: 2.5 ώρες
- Βαθμολογία: Θέματα (1) και (2) από **2 μονάδες**, Θέματα (3) και (4) από **3 μονάδες**
- Δίνονται: $T=\frac{1}{2}m v_0^2+\vec{v}_0\cdot(\vec{\omega}\times m\,\vec{r}_K)+\frac{1}{2}J\,\omega^2$ , $J'=J+m\,\delta^2$
- Ροπή αδρανείας ομογενούς ράβδου μάζας $m$ και μήκους $l$, ως προς ένα άκρο: $J = ml^3/3$

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012

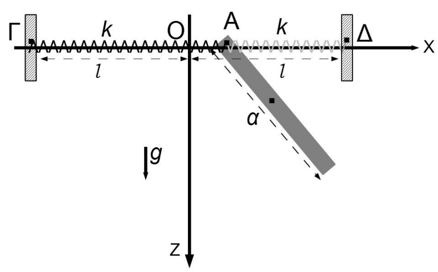
ΕΠΩΝΥΜΟ: ΟΝΟΜΑ: ΑΕΜ: ΕΞΑΜΗΝΟ:

1. α) Έστω $L = L(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$ η συνάρτηση Lagrange ενός συστήματος. Δείξτε ότι, αν η γενικευμένη συντεταγμένη $q_k$ είναι *αγνοήσιμη*, τότε η συζυγής ορμή $p_k$ είναι ολοκλήρωμα της κίνησης.

   β) Δίνεται η συνάρτηση Lagrange $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{\sqrt{(x^2+y^2)}} - (x^2+y^2)^{-3/2}$ (όπου $k$ σταθερά). Δείξτε ότι το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου (μάζας $m$=1) ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων (Oxy), $l = r^2\dot{\theta}$, είναι ολοκλήρωμα της κίνησης, όπου *(r,θ)* οι συνήθεις πολικές συντεταγμένες.

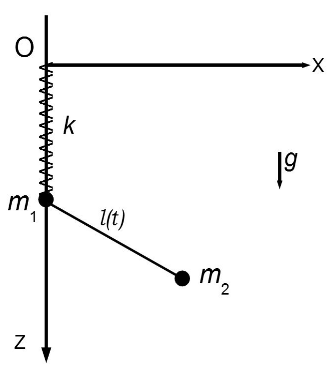
2. Ο πίνακας του τανυστή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας *O* στερεού σώματος, μάζας $m$=1, εκπεφρασμένος στο καρτεσιανό σύστημα *O*xyz που είναι σταθερά συνδεδεμένο με το στερεό σώμα, έχει στοιχεία $J_{11}$=4, $J_{22}$=4, $J_{33}$=8, $J_{12}$=-3, $J_{13}$=0, $J_{23}$=0. Να βρεθεί η έκφρασή του στο σύστημα των *κυρίων αξόνων* του στερεού.

3. Η ομογενής στερεά ράβδος μήκους *α* και μάζας *m* κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz, υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας, έτσι ώστε το άκρο της Α να κινείται κατά μήκος του άξονα Ox. Το Α είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια, φυσικού μήκους $l$ και σταθεράς $k$. Τα άκρα των δύο ελατηρίων, Γ και Δ αντίστοιχα, είναι ακλόνητα και η απόσταση ΓΔ είναι ίση με $2l$. Να βρεθούν:




   α) οι εξισώσεις Lagrange
   β) τα σημεία ισορροπίας
   γ) η συνάρτηση Hamilton του συστήματος

4. Η μάζα $m_1$ του σχήματος είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στον κατακόρυφο άξονα Oz και η $m_2$ στο κατακόρυφο επίπεδο xOz. Η $m_1$ συνδέεται με ελατήριο σταθεράς $k$ και φυσικού μήκους $l_0$, το ένα άκρο του οποίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο στην αρχή των αξόνων O. Η $m_2$ βρίσκεται στο άκρο απλού εκκρεμούς, το μήκος $l$ του οποίου μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $l(t)$=a$t$, όπου a>0 σταθερά. Η κίνηση γίνεται υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας. Να υπολογίσετε:




   α) τους βαθμούς ελευθερίας και τους δεσμούς της κίνησής του
   β) τη συνάρτηση Lagrange
   γ) τις διαφορικές εξισώσεις και τα ολοκληρώματα της κίνησης

---

– Δίνονται: $T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times m\, \vec{r}_K) + \frac{1}{2} J\,\omega^2$ , $J = J_K + m\,\delta^2$

– Ροπή αδρανειας ομογενούς ράβδου μάζας $m$ και μήκους $l$, ως προς το άκρο: $J = ml^2/3$

– Τα θέματα 1 και 2 δίνουν από **2 μονάδες**, ενώ τα θέματα 3 και 4 από **3 μονάδες**.